# Olympiade Francophone de Mathématiques

Cinquième édition

23 mars 2024

## Épreuve Senior

Les problèmes *ne* sont *pas* classés par ordre de difficulté

**Problème 1**

Soient $d$ et $m$ deux entiers strictement positifs fixés. Pinocchio et Geppetto connaissent les valeurs de $d$ et $m$, et jouent au jeu suivant. Tout d'abord, Pinocchio choisit un polynôme $P$ de degré au plus $d$ à coefficients dans $\mathbb{Z}$. Ensuite, Geppetto lui pose des questions de la forme « Quelle est la valeur de $P(n)$ ? », où $n \in \mathbb{Z}$. Pinocchio dit habituellement la vérité, mais il peut mentir jusqu'à $m$ fois. Quel est, en fonction de $d$ et $m$, le nombre minimal de questions que Geppetto devra poser pour être sûr de pouvoir déterminer $P$ quelles que soient les réponses de Pinocchio ?

*Remarque* : $\mathbb{Z}$ désigne l'ensemble des entiers, quel que soit leur signe.

**Problème 2**

Étant donné un entier $n \geqslant 2$, soient $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ deux ensembles chacun formé de $n$ points de l'espace à trois dimensions. On suppose que les $2n$ points ainsi obtenus sont tous distincts. Démontrer que l'on peut ordonner les points de $\mathcal{P}$ en une liste $P_1, P_2, \ldots, P_n$, et les points de $\mathcal{Q}$ en une liste $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ de manière à ce que, pour tous les indices $i$ et $j$, les boules de diamètres $[P_i\,Q_i]$ et $[P_j\,Q_j]$ aient au moins un point commun.

*Remarque* : La boule de diamètre $[PQ]$ est l'ensemble des points situés sur la sphère de diamètre $[PQ]$ et des points situés à l'intérieur de celle-ci.

**Problème 3**

Soient $ABC$ un triangle dont tous les angles sont aigus, $\omega$ son cercle circonscrit, et $O$ le centre de $\omega$. La hauteur de $ABC$ issue de $A$ recoupe $\omega$ en un point $D$ distinct de $A$, et le segment $[AC]$ recoupe le cercle circonscrit à $OCD$ en un point $E$ distinct de $C$. Enfin, on note $M$ le milieu du segment $[BE]$. Démontrer que $(DE)$ est parallèle à $(OM)$.

**Problème 4**

Soit $p$ un nombre premier fixé. Trouver tous les entiers $n \geqslant 1$ satisfaisant la propriété suivante : On peut regrouper les diviseurs positifs de $n$ deux par deux de manière à ce que, pour chaque couple $(d, d')$ ainsi formé, les deux conditions suivantes soient satisfaites :

- $d < d'$ ;
- $p$ divise $\lfloor \frac{d'}{d} \rfloor$.

*Remarque* : On rappelle que, lorsque $x$ est un réel, la notation $\lfloor x \rfloor$ désigne le plus grand entier inférieur ou égal à $x$. Par exemple, $\lfloor 3 \rfloor = \lfloor \pi \rfloor = \lfloor 3{,}99 \rfloor = 3$.

Durée de l'épreuve : 4 heures et 30 minutes

Chaque problème est noté sur 7 points